

2016 年応用数学期末試験

虚数単位 $i = \sqrt{-1}$ とする。

1

関数 $f(x)$ が微分可能ならば絶対積分可能ならば $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ が存在すること、つまり $|F(\omega)| < +\infty$ となることを示せ。ただしこの設問では、以下の事柄を証明無しで用いてはならない

$$|e^{-ia}| = 1, a \text{ は実定数}$$

2

複素数 $s \in \mathbb{C}$ に対して

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} e^{-sx} = 0$$

が成立することを証明せよ。ただし s の実部は正である。

3

次の関数 $f(x)$ のフーリエ変換 $F(\omega)$ を求めよ。ただし $c > 0$ とする。計算結果には自然対数の底 e を残してはならない。

$$f(x) = \begin{cases} x & (-c \leq x \leq c) \\ 0 & (\text{その他}) \end{cases} \quad (1)$$

$$f(x) = e^{-c|x|} \quad (2)$$

4

次の関数のラプラス変換を求めよ。

$$(1) (3x+1)e^{-2x} \quad (2) x \cos 2x \quad (3) \int_0^x t^2 e^{-t} dt$$

5

次の関数の逆ラプラス変換を求めよ。

$$(1) \frac{1}{s^3} + \frac{3}{s} \quad (2) \frac{s+1}{s^2+3} \quad (3) \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

6

次の微分方程式

$$y''(t) - y'(t) - 2y(t) = e^{-t}, \quad y'(0) = 2, y(0) = 1$$

について考える。

- (1) この方程式から、 $y(t)$ のラプラス変換を求めよ。
 - (2) ラプラス変換を用いてこの微分方程式を解け。
-

$$\mathcal{L}[x^n](s) = \frac{n!}{s^{n+1}}$$

$$\mathcal{L}[e^{ax}](s) = \frac{1}{s-a}$$

$$\mathcal{L}[\sin \omega x](s) = \frac{\omega}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[\cos \omega x](s) = \frac{s}{s^2 + \omega^2}$$

$$\mathcal{L}[e^{ax}g(x)](s) = \mathcal{L}[g(x)](s-a)$$