高校数学演習　第8講

問題 1

x, y は実変数とする．$\log_3 x + \log_3 y = 2$ のとき，$9x + 4y$ の最小値を求めなさい．

問題 2

方程式 $\log_2(x-3) + \log_4(x-1) = 2$ を解きなさい．

問題 3

75^{2020} は何桁ですか．ただし，$0.3010 < \log_{10} 2 < 0.3011$, $0.4771 < \log_{10} 3 < 0.4772$ である．

問題 4

10 以上の自然数 p, q に対して，$p^2 q$ が 13 桁，pq^4 は 21 桁であるという．p, q はそれぞれ何桁ですか．

問題 5

x の関数 $f(x) = 9^x + 9^{-x} - 3^{2+x} - 3^{2-x} + 17$ の最小値を求めたい．

1. $t = 3^x + 3^{-x}$ の最小値と，それを与える x の値を求めなさい．
2. $f(x)$ の最小値を求めなさい．

問題 1　解答

$\log_3 x + \log_3 y = \log_3 9$ であるから，$xy = 9$ である．ゆえに，$y = \frac{9}{x}$.
対数の定義より，$x, y > 0$ なので，相加相乗平均の大小関係から $x + \frac{4}{x} \geq 2\sqrt{x \cdot \frac{4}{x}} = 4$.
したがって，

$$9x + 4y = 9x + \frac{4 \cdot 9}{x} = 9(x + \frac{4}{x}) \geq 36.$$

問題 2　解答

$$\begin{aligned}\log_2(x-3) + \log_4(x-1) &= \log_4(x-3)^2 + \log_4(x-1)\\ &= \log_4(x-3)^2(x-1) = 2\end{aligned}$$

なので，$(x-3)^2(x-1) = 4^2 = 16$(ただし $x > 3$) を解けばよい．
求めるべき解は $(x-3)^2(x-1) - 16 = (x-5)(x^2-2x+5) = (x-5)((x-1)^2+4) = 0$ となる $x(> 3)$ で，$x = 5$ のみ．

問題 3　解答

$75 = 3 \times (10/2)^2$ を踏まえて，底を 10 とする対数をとると，

$$\begin{aligned}\log_{10} 75^{2020} &= 2020(\log_{10} 3 + 2(1 - \log_{10} 2))\\ &= 2020(2 - 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3)\\ &> 2020(2 - 2 \times 0.3011 + 0.4771)\\ &= 3787.298.\end{aligned}$$

一方で

$$\begin{aligned}2020(2 - 2\log_{10} 2 + \log_{10} 3) &< 2020(2 - 2 \times 0.3010 + 0.4772)\\ &= 3787.904\end{aligned}$$

なので $3787 < \log_{10} 75^{2020} < 3788$. よって $10^{3787} < 75^{2020} < 10^{3788}$. したがって，3788 桁．
参考．対数がこの精度であると，上 1 桁を算出することはできない．上 1 桁は $75^{2020} \div 10^{3787}$ の整数部分であることに注意して，算出できない理由を考えてみよ．

問題 4　解答

底を 10 とする対数をとると，

$$12 < 2\log_{10} p + \log_{10} q < 13 \cdots (1)$$

$$20 < \log_{10} p + 3\log_{10} q < 21 \cdots (2)$$

(1) の 3 倍から (2) を引いて

$$16 < 5\log_{10} p < 18$$

$$3.2 < \log_{10} p < 3.6$$

ゆえに p は 4 桁である．また，(2) の 2 倍から (1) を引いて

$$28 < 5\log_{10} p < 29$$

$$5.6 < \log_{10} p < 5.8$$

ゆえに q は 6 桁である．

問題 5　解答

1. $p = 3^x$ とおく．このとき $t = p + \frac{1}{p}$ となる．$p > 0, \frac{1}{p} > 0$ なので，相加相乗平均の大小関係から $t = p + \frac{1}{p} \geq 2\sqrt{p \cdot \frac{1}{p}} = 2$ となる．ゆえに t の最小値は 2 で，そのとき $p = 1$ すなわち $x = 0$.

2. $f(x)$ を t で表すと，$f(x) = t^2 - 9t + 15 = (t - \frac{9}{2})^2 - \frac{21}{4}$ となる．$t \geq 2$ が動くとき，$t = \frac{9}{2}$ のときに最小値 $-\frac{21}{4}$ をとる．