高校数学演習　第7講

問題1

0 以上の実数 a, b, c は，$a+b=2, a^3+b^3+c^3=\frac{141}{8}$ を満たす．

1. c の最大値と最小値を求めなさい．
2. $a^2+b^2+c^2$ の最大値を与える a を求めなさい．

問題2

$f(x)$ は x の二次以下の関数とする．この関数に対し，$\int_0^2 f(x)dx = p_0 f(0) + p_1 f(1) + p_2 f(2)$ となる．実数 p_0, p_1, p_2 をそれぞれ求めなさい．

問題3

$1+\sin^2 x = 3\sin x \cos x$ のときの $\tan x$ の値を求めなさい．

問題4

a を定数として $f(x) = a-2+(2a-1)\sin x + 2\cos^2 x$ とする．$-\frac{\pi}{2} \leq x \leq \frac{\pi}{2}$ において $f(x)=0$ の解がただひとつのみであるための a の条件を求めなさい．

問題 1　解答

1. $a+b=2$ から，$b=2-a$ を後者の式に代入することで

$$\begin{aligned} c^3 &= \frac{141}{8}-a^3-b^3 = \frac{9}{2}-a^3-(2-a)^3 \\ &= \frac{141}{8}-6a^2+12a-8 \\ &= -6(a-1)^2+\frac{125}{8} \end{aligned}$$

   ここで，$0 \leq a \leq 1$ に注意する．以上より，$a=b=1$ で最大値 $c=\frac{5}{2}$ を得る．また，$a=0,2$ で $(b=2,0)$ $c=\frac{\sqrt[3]{77}}{2}$ を得る．よって常に $c \geq 0$ を満たす．

2. 1. より，$2(a-1)^2=-c^3/3+125/24$ に注意して

$$\begin{aligned} a^2+b^2+c^2 &= a^2+(2-a)^2+c^2 \\ &= 2a^2-4a+4+c^2 \\ &= 2(a-1)^2+2+c^2 \\ &= -c^3/3+125/24+2+c^2 = -\frac{1}{3}c^3+c^2+173/24. \end{aligned}$$

   $f(c)=-\frac{1}{3}c^3+c^2+173/24$ とおいて，この関数の増減を調べる．$f'(c)=-c^2+2c=-c(c-2)$ から増減表を書く（表省略）．このときに $2<\sqrt[3]{77}/2 \leq c \leq 5/2$ に注意せよ．以上より，この c の範囲で，c が増えるにつれて $f(c)$ は単調に減少する．したがって $c=\sqrt[3]{77}/2$ すなわち $a=0,2$ で最大値を与える．

問題 2　解答

$f(x)=ax^2+bx+c$ とすると，$f(0)=c, f(1)=a+b+c, f(2)=4a+2b+c$ である．次に，

$$\int_0^2 f(x)dx = \frac{8}{3}a+2b+2c$$

であるから，

$$\begin{aligned} \frac{8}{3}a+2b+2c &= cp_0+(a+b+c)p_1+(4a+2b+c)p_2 \\ &= (p_1+4p_2)a+(p_1+2p_2)b+(p_0+p_1+p_2)c \end{aligned}$$

より，$p_1+4p_2=\frac{8}{3}, p_1+2p_2=2, p_0+p_1+p_2=2$ を満たす．これを解くと $p_0=1/3, p_1=4/3, p_2=1/3$ となる．

参考．二次関数 $f(x)$ に関するものは $f(0), f(1), f(2)$ でだいたい決まる．

問題 3　解答

$1+\sin^2 x = 3\sin x\cos x > 0$ から，$\cos x \neq 0$ を確認する．条件式の両辺を $\cos^2 x$ で割ると，

$$\frac{1}{\cos^2 x}+\tan^2 x = 3\tan x = (1+\tan^2 x)+\tan^2 x = 3\tan x$$

となる．つまり，$2\tan^2 x - 3\tan x + 1 = 0$, したがって $\tan x = 1, 1/2$.

問題4　解答

$$
\begin{aligned}
f(x) &= a-2+(2a-1)\sin x+2\cos^2 x \\
&= a-2+(2a-1)\sin x+2(1-\sin^2 x) \\
&= -2\sin^2 x+(2a-1)\sin x+a \\
&= -(2\sin x+1)(\sin x-a)
\end{aligned}
$$

なので，少なくとも $\sin x=-1/2$ つまり $x=-\pi/6$ は $f(x)=0$ を与える．
したがって $a=-1/2$ である（$f(x)=\frac{1}{2}(2\sin x+1)^2$ となる）か，常に $\sin x-a\neq 0$ であれば，解はただひとつである．後者を満たす必要十分条件は，$a>1$ または $a<-1$ である．まとめると，$a<-1, a=-1/2, a>1$ のときにのみ $f(x)$ はただひとつの解を持つ．