高校数学演習　第6講

問題1

$|x| \leq a(a > 0)$ を定義域とする関数 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ について，

1. $f(x)$ の最大値を求めなさい．
2. $f(x)$ の最小値を求めなさい．

問題2

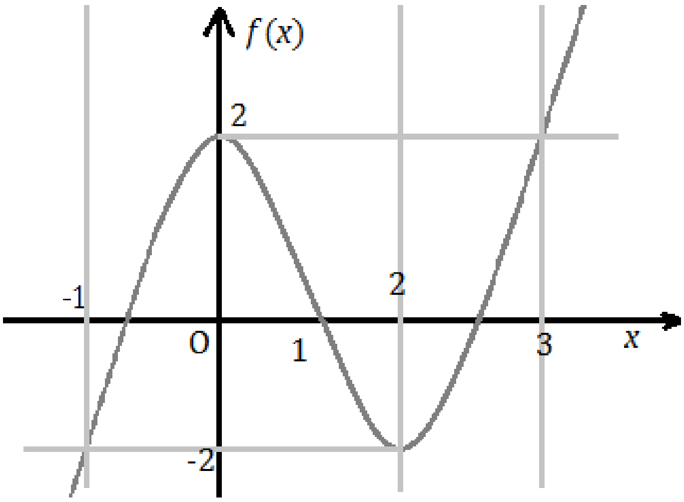
点 $(-1, a)$ から曲線 $y = x^3 - x$ に向かって引く接線が 3 本になるための，a が満たす必要十分条件を求めなさい．

問題3

$f(x) = x^3 - 6x^2 + kx - 4$ とする．方程式 $f(x) = 0$ が有理数の重解をもつとき，k は何ですか．またこのとき $f(x) \leq 0$ を満たす x の条件は何ですか．

問題 1　解答

1. 関数の増減については自習のこと．グラフは次の図のようになる．



   図を見ると，$f(a)$ の最大値は，$-3 \leq x \leq 3$ を定義域とするときは $f(0) = f(3) = 2$ が最大値になり，$-a \leq x \leq a(a > 3)$ を定義域とするときは $f(a) = a^3 - 3a^2 + 2$ が最大値になる．したがって，$f(x)$ の最大値は，$a \leq 3$ のとき 2, $a > 3$ のとき $a^3 - 3a^2 + 2$.

2. 図を見ると，$f(a)$ の最小値は，$-1 \leq x \leq 1$ を定義域とするときは $f(-a) = -a^3 - 3a^2 + 2$ が最小値となり，$-a \leq x \leq a(a > 1)$ を定義域とするときも $f(-a) = -a^3 - 3a^2 + 2$ が最小値になる．したがって，$f(x)$ の最小値は，$-a^3 - 3a^2 + 2$.

問題 2　解答

$y' = 3x^2 - 1$ であるから，曲線上の点 $(t, 3t^2 - 1)$ における接線の式は

$$\begin{aligned} y - (t^3 - t) &= (3t^2 - 1)(x - t) \\ y &= (3t^2 - 1)x - 2t^3 \end{aligned}$$

である．接線は $(-1, a)$ を通るので，$x = -1, y = a$ を代入すると，$a = 1 - 3t^2 - 2t^3$ を得る．この式の t が異なる 3 つの実数解を持つような a が，接線を 3 本にする a である．(略) したがって $0 < a < 1$.

問題 3　解答

$f(x) = 0$ の重解を α, 他の解を β とすると，

$$f(x) = x^3 - 6x^2 + kx - 4 = (x - \alpha)^2(x - \beta)$$

と表せる．右辺を展開すると

$$x^3 - 6x^2 + kx - 4 = x^3 - (2\alpha + \beta)x^2 + (\alpha^2 + 2\alpha\beta)x - \alpha^2\beta.$$

よって，係数を比較すると

$$2\alpha+\beta=6, \alpha^2+2\alpha\beta=k, \alpha^2\beta=4$$

なので，$\alpha=1, \beta=4, k=9$ がわかる．
　また，$f(x)=(x-1)^2(x-4)$ なので，そのグラフを考察すれば $x \leq 4$ のとき $f(x) \leq 0$ であることがわかる．