高校数学演習　第5講

問題 1

$0 \leq \theta < 2\pi$ とする．$\log_2(-4\cos^2\theta + 3\cos\theta)$ と $\log_2(-4\cos^3\theta + 3\cos\theta + 1)$ がともに整数になるような θ を求めたい．

1. $x = \cos\theta$ とおくことを考える．$p(x) = -4x^2 + 3x$ の取る値の範囲を求めなさい．
2. $\log_2 p(x)$ が整数のとき，$q(x) = -4x^3 + 3x + 1$ の取る**整数**をすべて求めなさい．
3. $\log_2(-4\cos^2\theta + 3\cos\theta)$ と $\log_2(-4\cos^3\theta + 3\cos\theta + 1)$ がともに整数になるような θ を求めなさい．

（12 年　一橋大学　改）

問題 2

実数 a, b, c が $a + b + c = 6, a^2 + b^2 + c^2 = 30$ を満たすとき，c の最大値を求めなさい.（14 年　早稲田大学　改）

問題 3

-1 でない $\sqrt[3]{-1}$ の値を ω とおくとき，整数 k を用いて

$$(2 - 5\omega)(5 - 2\omega) + 2(1 + \omega^2) = k\omega$$

と表せる．k を求めなさい.（14 年　慶応義塾大学　改）

問題 4

$\sin x + \sin y = 1$ と $\cos x + \cos y = \sqrt{3}$ を満たすとき，$\tan(x + y)$ の値を求めなさい．

問題 1

1. $x = \cos\theta$ とおくと $-1 \leq x \leq 1$. $p(x) = -4x^2 + 3x = -4(x - \frac{3}{8})^2 + \frac{9}{16}$ であるので，$x = \frac{3}{8}$ で最大値 $\frac{9}{16}$, $x = -1$ で最小値 -7 をとる．したがって $-7 \leq x \leq \frac{9}{16}$.

2. 対数の条件から，$p(x) > 0$. $\log_2 p(x)$ がとれる整数の最大値が -1 であるから，$p(x) \leq \frac{1}{2}$. よって，$0 < p(x) \leq \frac{1}{4}$ または $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}$ のときのみ考えればよい（$y = p(x)$ のグラフを描き，$0 < p(x) \leq \frac{1}{2}$ に対応する部分を塗ってみよ）．

   ここで，$q(x) = -4x^3 + 3x + 1$ の増減は次のようになる．

x	-1		$-\frac{1}{2}$		$\frac{1}{2}$		1
$q'(x)$		$-$	0	$+$	0	$-$	
$q(x)$	2	減少	0	増加	2	減少	0

   $0 < p(x) \leq \frac{1}{4}$ または $\frac{1}{2} \leq x < \frac{3}{4}$ のとき $1 < q(x) \leq 2$. したがって $q(x) = 2$ のみ整数になる．

3. 以上から $q(x) = 2$ を満たす $x = \frac{1}{2}$ が必要十分で，したがって $\theta = \pi/3, 5\pi/3$.

問題 2

$a = 6 - b - c$ とおくと，

$$(6 - b - c)^2 + b^2 + c^2 = 30$$

式変形して

$$b^2 + (c - 6)b + (c^2 - 6c + 3) = 0$$

とすると，b についての二次方程式になるが，b は実数であるので判別式

$$D = (c - 6)^2 - 4(c^2 - 6c + 3)$$

が 0 以上である必要がある．ゆえに

$$c^2 - 4c - 8 \leq 0$$

これを解くと，$2 - 2\sqrt{3} \leq c \leq 2 + 2\sqrt{3}$ つまり c の最大値は $2 + 2\sqrt{3}$ である．

問題 3

$\omega^3 + 1 = 0$ が成り立ち，$\omega = -1$ はこの方程式の解であるから次のように因数分解できる；

$$(\omega + 1)(\omega^2 - \omega + 1) = 0.$$

$\omega \neq -1$ のとき，$\omega^2 - \omega + 1 = 0$ を満たすため，$\omega^2 + 1 = \omega$ という式を得る．したがって

$$\begin{aligned} & (2 - 5\omega)(5 - 2\omega) + 2(1 + \omega^2) \\ = \quad & 10(\omega^2 + 1) + 2(1 + \omega^2) \\ = \quad & 12(\omega^2 + 1) = 12\omega. \end{aligned}$$

問題 4

$$\begin{aligned}
(\sin x + \sin y)^2 + (\cos x + \cos y)^2 &= 1 + 3 = 4 \\
2(\sin x \sin y + \cos x \cos y + 1) &= 4 \\
\sin x \sin y + \cos x \cos y &= 1 \\
\cos(x - y) &= 1 \text{（加法定理）}
\end{aligned}$$

ゆえに，k を整数として $x - y = 2k\pi$ と表せることにより，$y = x - 2k\pi$ となる．ここで，

$$\sin x + \sin y = \sin x + \sin(x - 2k\pi) = 2\sin x = 1$$

より，$\sin x = 1/2$. また，

$$\cos x + \cos y = \cos x + \cos(x - 2k\pi) = 2\cos x = \sqrt{3}$$

より，$\cos x = \sqrt{3}/2$. よって，整数 m が存在し，$x = \pi/6 + 2m\pi, y = \pi/6 + 2(m-k)\pi$ である．したがって，$\tan(x+y) = \tan(\pi/3 + (2m + 2(m-k))\pi) = \sqrt{3}$.