高校数学演習　第4講

問題1

$k \neq 4$ とする．2つの二次方程式 $kx^2 - x + 4 = 0,\ 4x^2 - x + k = 0$ が共通解を持つような k の値を求めよ.（09年　東京薬科大学　改）

問題2

$x^3 - mx^2 - nx + 10$ を $(x-1), (x+2)$ で割ると，どちらの場合にも余りは出ないという．m, n の値を求めなさい.

問題3

$k > 0$ とする．$x^2 - (k+2)x + 3k = 0$ の2つの解の差がちょうど2であるとき，k の値は何か．またこのときの解を求めよ.

問題4

実数 a, b を用いた二次方程式 $x^2 + ax + b = 0$ の解のひとつが複素数 α であり，また $x^2 - bx + 3a + 1 = 0$ の解の一つが $\alpha + 3$ である．a, b, α をそれぞれ求めよ.

問題 1 解答

共通解を α とすると，$k\alpha^2-\alpha+4=0, 4\alpha^2-\alpha+k=0$ が成り立つ．辺々引くと，$(k-4)\alpha^2+(4-k)=0$ である．ゆえに $(\alpha^2-1)(k-4)=0$. $\alpha=1$ のとき $k\cdot 1^2-1+4=0$ より $k=-3$.

問題 2 解答

ある実数 p を用いて次のように表すことができる；
$x^3-mx^2-nx+10=(x-1)(x+2)(x-p)=x^3-(p-1)x^2-(p-2)x+2p.$
定数項を比較して $p=5$, x^2 の項を比較して $m=p-1=4$, x の項を比較して $n=p+2=7$ を得る．

問題 3 解答

解を $\alpha, \alpha+2$ とおくと，解と係数の関係から

$$\alpha+\alpha+2=2\alpha+2=k+2,$$

$$\alpha(\alpha+2)=3k$$

これらを解くと，$\alpha=0,4$ を得る．$\alpha=0$ のとき $k=0$ だが，前提の $k>0$ に不適．$\alpha=4$ のとき $k=8$ で，このときの方程式は $x^2-10x+24=0$, 解は $x=4,6$ でたしかに解の差が 2 である．

問題 4 解答

α の共役な複素数を $\bar{\alpha}$ とする．$\bar{\alpha}$ も $x^2+ax+b=0$ の解であるから，解と係数の関係から $\alpha=p+qi$ とすると，$-a=2p, b=p^2+q^2$ を得る．もう一方の方程式の条件から同様に $b=2p+6, 3a+1=(p+3)^2+q^2$ を得る．これらを解くと，$a=2, b=4, \alpha=-1\pm\sqrt{3}i$