高校数学演習　第3講

問題1

方程式 $x^4+4x^3-3x^2+4x+1=0$ を解きなさい．

問題2

$0<a<1$ とする．$a^2+\frac{1}{a^2}=7$ であるとき，$a+\frac{1}{a}, a^3$ の値をそれぞれ求めなさい．

問題3

整式 $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割ると $3x+2$ 余り，$x+3$ で割ると 9 余るという．

1. $P(x)$ を $x-1$ で割った余りはいくつか．
2. $P(x)$ を $(x-1)(x+3)$ で割った余りはいくつか．
3. $P(x)$ を $(x-1)^2(x+3)$ で割った余りはいくつか．

問題4

不等式 $(x^2-5x+4)(x^2+2x-3)<0$ を解きなさい．

問題 1 解答

$x \neq 0$ であるから，x^2 で両辺を割ると

$$x^2 + 4x - 3 + \frac{4}{x} + \frac{1}{x^2} = 0$$

$t = x + \frac{1}{x}$ とおくと，$x^2 + \frac{1}{x^2} = t^2 - 2$ である．よって方程式は

$$t^2 + 4t - 5 = 0$$

となり，ゆえに $t = 1, 5$ を得る．

$t = x + \frac{1}{x}$ であったから $x^2 - tx + 1 = 0$ であり，解は $x^2 - x + 1 = 0$ または $x^2 - 5x + 1 = 0$ を満たす．したがって，$x = \frac{1 \pm \sqrt{3}i}{2}, \frac{-5 \pm \sqrt{21}}{2}$.

問題 2 解答

まず，$a > 0$ であるから，$a + \frac{1}{a}, a^3$ はどちらも正である．$\left(a + \frac{1}{a}\right)^2 = a^2 + \frac{1}{a^2} + 2 = 9$. よって $a + \frac{1}{a} = 3$. またこの式の両辺を a 倍しまとめると，$a^2 - 3a + 1 = 0$. このとき $a = \frac{3 \pm \sqrt{6}}{2}$ を得るが，$a < 1$ ゆえ $a = \frac{3 - \sqrt{6}}{2}$. したがって $a^3 = \frac{81 - 33\sqrt{6}}{8}$.

問題 3 解答

1. 求める余りを a とおくと，ある整式 $Q(x)$ が存在して

   $$P(x) = (x-1)Q(x) + a.$$

   特に，$x = 1$ のときは $P(1) = a$ となる．ここで第一の条件から，ある整式 $Q'(x)$ を用いて

   $$P(x) = (x-1)^2 Q'(x) + 3x + 2.$$

   特に，$x = 1$ のときは $P(1) = 3 \times 1 + 2 = 5$ である．したがって $a = 5$ となる．

2. 求める余りを $ax + b$ とおくと，ある整式 $Q(x)$ が存在して

   $$P(x) = (x-1)(x+3)Q(x) + ax + b.$$

   特に，$x = 1$ のときは $P(1) = a + b$ となる．ここで第一の条件から，$P(1) = 5$ である．一方で $x = -3$ のときは $P(-3) = -3a + b$ となる．ここで第二の条件から，$P(-3) = 9$ である．すなわち，$a + b = 5, -3a + b = 9$ を同時に満たす．これを解くと，$a = -1, b = 6$. したがって $(x-1)(x+3)$ で割った余りは $-x + 6$ である．

3. 求める余りを $A(x)$ とおくと，ある整式 $Q(x)$ が存在して

   $$P(x) = (x-1)^2(x+3)Q(x) + A(x).$$

   ここで $P(x)$ を $(x-1)^2$ で割った余りが $3x+2$ であったから，$A(x)$ を $(x-1)^2$ で割ったとき $3x+2$ だけ余らなければならない．このときある整数 r を用いて $A(x) = (x-1)^2 r + 3x + 2$. さらに $P(-3) = 9$ であったので，

   $$P(-3) = A(-3) = 16r - 7 = 9.$$

   ゆえに $r = 1$, したがって $A(x) = x^2 + x + 3$.

問題 4

- $(x^2-5x+4)<0, (x^2+2x-3)>0$ のとき
  $(x-1)(x-4)<0$ かつ $(x-1)(x+3)>0$ であるから，このとき $1<x<4$.
- $(x^2-5x+4)>0, (x^2+2x-3)<0$ のとき
  $(x-1)(x-4)>0$ かつ $(x-1)(x+3)<0$ であるから，このとき $-3<x<1$.

したがって，$-3<a<4$, ただし $x=1$ を除く.