高校数学演習　第 2 講

問題 1

$x = 3 - \sqrt{7}$ とする．

1. $x^2 + ax + b = 0$ を満たす a, b を求めなさい．
2. $x^5 - 7x^4 + 2x^2 - 5x + 1$ の値を求めなさい．

問題 2

連立方程式

$$\begin{cases} x^2 + 2x - 4 > 0 & (1) \\ x^2 - (a+1)x + a \leq 0 & (2) \end{cases}$$

の解 x としてとれる整数が唯一になるような a の範囲を求めなさい．

問題 3

$x^2 - 2xy + 4y^2 - 12y + 7$ の最小値と，それを与える x, y を求めなさい．

問題 4

二次方程式 $x^2 + 2ax - a + 2 = 0$ の解を考える．

1. 2 つの解が異符号であるような a の範囲を求めなさい．
2. 2 つの解がどちらも 1 以上であるような a の範囲を求めなさい．

問題 1 解答

1. この方程式の解は $\frac{-a\pm\sqrt{a^2-4b}}{2}$ で，そのひとつが $3-\sqrt{7}$ であるから，

$$\begin{cases} -\dfrac{a}{2}=3 & (3) \\ \dfrac{\sqrt{a^2-4b}}{2}=\sqrt{7} & (4) \end{cases}$$

   が成り立つ．これを解いて，$a=-6, b=2$.

2. $x^2-6x+2=0$ を利用する．

$$\begin{aligned} x^5-7x^4+2x^2-5x+1 &= (x^2-6x+2)(x^3-x^2-8x-44)-253x+89 \\ &= -253(3-\sqrt{7})+89 \\ &= -670+253\sqrt{7} \end{aligned}$$

問題 2 解答

不等式 (1) より，$x<-1-\sqrt{5}$ または $x>-1+\sqrt{5}$ である．不等式 (2) より，$(x-a)(x-1)\leq 0$.

- $a=1$ の場合，不等式 (2) の解は $x=1$ だが，(1) との共通解を持たない．
- $a<1$ の場合，不等式 (2) の解は $a\leq x\leq 1$ である．$a<-1-\sqrt{5}$ であれば (1) との共通解 $a<x<-1-\sqrt{5}$ を持つ．$x=-4$ が唯一の整数解であるように，$-5<a\leq -4$ とすればいい．
  （注：$a>-4$ のときは整数解を持たない）
- $a>1$ の場合，不等式 (2) の解は $1\leq x\leq a$ である．$a>-1+\sqrt{5}$ であれば (1) との共通解 $-1+\sqrt{5}<x<a$ を持つ．$x=2$ が唯一の整数解であるように，$2\leq a<3$ とすればいい．

まとめると，$-5<a\leq -4, 2\leq a<3$ のとき，かつそのときに限り整数解を唯一に持つ．

問題 3 解答

$x^2-2xy+4y^2-12y+7=(x-y)^2+3(y-2)^2-5$ なので，$x-y=y-2=0$ のときに最小値 -5 をとる．このとき $x=y=2$ である．

問題 4 解答

$f(x)=x^2+2ax-a+2$ とおく．

1. $f(x)=0$ の解が異符号であるためには $f(0)<0$ でなければならず，かつそれだけで十分である．つまり，$f(0)=-a+2<0$ ゆえに $a>2$ のとき，解は異符号になる．
2. 放物線 $y=f(x)$ と x 軸の交点の x 座標がどちらも 1 以上であればよい．このとき，次の条件を満たせば必要十分である．

- $f(1) \geq 0$
- $f(x) = 0$ の判別式 $D \geq 0$
- 放物線の軸に関して $-a \geq 1$

これらから，求めるべき範囲は $a + 3 \geq 0$ かつ $4a^2 - 4(-a + 2) \geq 0$ かつ $a \leq -1$ であり，すなわち $-3 \leq a \leq -2$.