高校数学演習　第1講「最適化」につながる高校数学

問題1

$1 \leq x \leq 5$ を定義域とする関数

$$f(x) = (x^2 - 6x + 1)^2 + 3x^2 - 18x + 5$$

の最小値と，それを与える x の解を求めなさい

問題2

不等式

$$(x^2 + y^2)(a^2 + b^2) \geq (ax + by)^2$$

を示しなさい（これは「コーシー・シュワルツの不等式」と呼ばれる）.

問題3

実数 x, y は $x^2 + xy + y^2 = 1$ を満たし，$s = x + y, t = xy$ とおきます.

1. t を s で表しなさい.
2. s の取りうる範囲を求めなさい.
3. $k = x^2 + 4xy + y^2 - x - y$ の最小値を求めなさい.

問題4

連立方程式

$$\begin{cases} x(x^2 + y - 4) = 0 & (1) \\ y(x + y - 2) = 0 & (2) \end{cases}$$

の解 (x, y) は何通りありますか.

問題 1 解答

$$\begin{aligned} f(x) &= (x^2-6x+1)^2+3x^2-18x+5 \\ &= (x^2-6x+1)^2+3(x^2-6x+1)+2 \end{aligned}$$

なので，$t=x^2-6x+1=(x-3)^2-8$ とおくと，

$$f(x)=t^2+3t+2=\left(t+\frac{3}{2}\right)^2-\frac{1}{4}$$

そして $1\leq x\leq 5$ を動くとき $-8\leq t\leq -4$ を動くので，$t=-4$, つまり $x=1,5$ ($x^2-6x+1=-4$ を解く) で最小値 6 をとる．

参考．数学分野のひとつ「最適化」において，最小値（最大値）を「最適値」，それを与える入力 x を「最適解」といい，一般の関数に対する最適化の研究が盛んです．

問題 2 解答

$$\begin{aligned} & (x^2+y^2)(a^2+b^2)-(ax+by)^2 \\ =\ & a^2x^2+b^2x^2+a^2y^2+b^2y^2-(a^2x^2+2abxy+b^2y^2) \\ =\ & b^2x^2-2abxy+a^2y^2=(bx-ay)^2\geq 0 \end{aligned}$$

したがって $(x^2+y^2)(a^2+b^2)\geq(ax+by)^2$.

問題 3 解答

1. $x^2+xy+y^2=(x+y)^2-xy=s^2-t=1$ ゆえ，$t=s^2-1$.

2. X についての二次方程式

$$X^2-sX+t=0$$

を考える．この解は $s+t, st$ すなわち x,y であり，これらは実数であるから，二次方程式の判別式について $s^2-4t\geq 0$ が成り立つ．ここで 1 より，$s^2-4(s^2-1)=-3s^2+4\geq 0$. したがって $-\frac{2\sqrt{3}}{3}\leq s\leq\frac{2\sqrt{3}}{3}$ である．

3.

$$\begin{aligned} k &= (x+y)^2+2xy-(x+y) \\ &= s^2+2t-s \\ &= s^2+2(s^2-1)-s \\ &= 3s^2-s-2 \\ &= 3(s-\frac{1}{6})^2-\frac{23}{12}. \end{aligned}$$

$-\frac{2\sqrt{3}}{3} \leq s \leq \frac{2\sqrt{3}}{3}$ であるから，$s = \frac{1}{6}$ が選べて，最小値 $-\frac{23}{12}$ を得る．

参考． 一般の関数に「ある制約」を満たす中で最適化することを「制約付き最適化」といいます．

問題 4 解答

$AB = 0$ の解は，$A = 0$ または $B = 0$ であることを利用して解きます．

- (1) の解が $x = 0$ であるとき
  - (2) の解が $y = 0$ であるとき，解 $(x, y) = (0, 0)$ を得る．
  - (2) の解が $y \neq 0$ であるとき，$x + y - 2 = 0$ なので $y = 2$ ゆえ解 $(x, y) = (0, 2)$ を得る．
- (1) の解が $x \neq 0$ であるとき，$x^2 + y - 4 = 0$ となる．
  - (2) の解が $y = 0$ であるとき，$x^2 - 4 = 0$ を解いて，解 $(x, y) = (0, \pm 2)$ を得る．
  - (2) の解が $y \neq 0$ であるとき，$x + y - 2 = 0$ なので $y = -x + 2$. 上の二元二次方程式に代入して，$x^2 + (-x + 2) - 4 = x^2 - x - 2 = 0$ となるので，解 $(x, y) = (-1, 3), (2, 0)$ を得る．

以上から解の組は $(0, 0), (0, 2), (0, -2), (-1, 3), (2, 0)$ だけである．つまり，5 個である．

参考． 「最適化」において，最適解であるために必要な「KKT 条件」というものがあるのですが，この条件だけで（面倒な計算をせずに）最適解が求まることがあります．この方法を「ラグランジュの未定乗数法」といったりして，今の問題の考え方などを用いることもあります，