第 9 回　面積

難関な図形の面積でも、積分を使ってしまえば意外とあっさりいくものもある。

1

$a \leq b$ のとき
$$-\int_a^b (x-a)(x-b)dx = \frac{(b-a)^3}{6}$$
を示せ。

2

次の各々の図形の面積 S を求めよ。

1. $y = x^2, y = x + 2$ の線に囲まれた図形。
2. $y = x^2 + 4x + 1, y = -2x^2 - 2x - 5$ の線に囲まれた図形。
3. $y = x^2 - 5x - 3, y = 3x - 10$ の線に囲まれた図形。
4. $y = 3x^2, y = 2x(x + 1)$ の線に囲まれた図形。
5. $y = x^3 + 4x^2 + x - 6$ の線と x 軸に囲まれた図形。

Answer

1.

$$-\int_a^b (x-a)(x-b)dx = -\int_a^b \{x^2-(a+b)x+ab\}dx$$
$$= -\left[\frac{1}{3}x^3-\frac{1}{2}(a+b)x^2+abx\right]_a^b = -\{\frac{1}{3}(b^3-a^3)-\frac{1}{2}(b^2-a^2)+ab(b-a)\}$$
$$= -\frac{1}{6}(a^3-3a^2b+3ab^2-b^3) = \frac{1}{6}(b-a)^3$$

2.

1. 囲まれた図形の積分区間を求めるために、$x^2 = x+2$ を解くと $x = -1, 2$ である。
   よって面積 $S = \int_{-1}^{2}(x+2)dx - \int_{-1}^{2} x^2 dx = -\int_{-1}^{2}(x^2-x-2)dx = -\int_{-1}^{2}(x-2)(x+1)dx$
   1. の公式から $S = \frac{\{2-(-1)\}^3}{6} = \frac{9}{2}$
   二次曲線と一次直線、および二次曲線同士によって囲まれる図形の面積には、すべてこの公式が使える。

2. $x^2+4x+1 = -2x^2-2x-5$ を解くと、$x = -2, -1$
   $S = \int_{-2}^{-1}(-2x^2-2x-5)dx - \int_{-2}^{-1}(x^2+4x+1)dx = -3\int_{-2}^{-1}(x+2)(x+1)dx$
   1. の公式から $S = 3\frac{\{-1-(-2)\}^3}{6} = \frac{1}{2}$

3. $x^2-5x-3 = 3x-10$ を解くと、$x = 1, 7$
   $S = \int_1^7(3x-10)dx - \int_1^7(x^2-5x-3)dx = -\int_1^7(x-1)(x-7)dx$
   1. の公式から $S = \frac{(7-1)^3}{6} = 36$

4. $3x^2 = 2x(x+1)$ を解くと、$x = 0, 2$
   $S = \int_0^2 2x(x+1)dx - \int_0^2(3x^2)dx = -\int_0^2 x(x-2)dx$
   1. の公式から $S = \frac{2^3}{6} = \frac{4}{3}$

5. $f(x) = x^3+4x^2+x-6 = 0$ を解くと、$x = -3, -2, 1$
   また $-3 \leq x \leq -2, x \geq 1$ で $f(x) \geq 0$,
   $x \leq -3, -2 \leq x \leq 1$ で $f(x) \leq 0$
   $S = \int_{-3}^{-2} f(x)dx - \int_{-2}^{1} f(x)dx = 2F(-2) - F(-3) - F(1) = \frac{71}{6}$