

第8回 多項式

多項式は、3次以下の式なら因数定理を使って分解できる。4次以上になると、たとえば $f(x) = (x^2 + x + 1)^2 = x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 2x + 1$ であるが、 $f(x) = 0$ となるような実数 x は存在しないので、因数分解ができるかどうかの判定が難しくなってしまう。

さて、これは大学で習う内容（一部の理系でも習わないかもしれない）だから、今一度忘れよう。 $P(x)$ という文字が現れたら、とりあえず「 P は x の関数」ととらえるといいだろう。すなわち、 $P(1)$ とは、 x で表される式 P に $x = 1$ を代入した値である。

次の各問いに答えよ。

1. $P(x) = 3x^4 - 2x - 7$ を $Q(x) = x^2 - x + 1$ で割った時の商 $R(x)$ 及び、余り $K(x)$ を求めよ。
2. $P(x)$ を $x-1$ で割ると 2 , $x+2$ で割ると -1 余る。 $P(x)$ を $(x-1)(x+2)$ で割った余り $K(x)$ を求めよ。
3. $P(x)$ を $x^2 - 2x - 3$ で割ると $x - 5$ 余る。 $P(x)$ を $x+1, x-3$ でそれぞれ割った余り k_{-1}, k_3 を求めよ。
4. $P(x)$ を $x^2 - 1$ で割ると $x - 5$ 余り、 $x^2 - 4$ で割ると $x + 1$ 余る。 $x^2 + x - 2$ で割った余りを求めよ。
5. $x^{10} + 1$ を $x^2 - 1$ で割った余りを求めよ。
6. $x = 2 + \sqrt{3}i$ のときの $x^3 - 7x^2 + x - 1$ の値を求めよ。
7. $x = -3 + i$ のときの $x^4 - 2x^2 + 5x + 30$ の値を求めよ。

Answer

1. $R(x) = 3x(x + 1), K(x) = -5x - 7$

2. $K(x) = \frac{x+5}{3}$

3. $k_{-1} = -6, k_3 = -2$

4. $-x - 3$

5. 2

6. $-16 - 18\sqrt{3}i$

7. $27 - 79i$

$P(x) = Q(x)R(x) + K(x)$ において、 $Q(\alpha) = 0$ となるような α を代入すると、 $P(\alpha) = K(\alpha)$ となる。余りの各項の係数を a, b, c, \dots として、与えられた条件式を前文の考え方に適用することで連立方程式を作ることができる。