第13回　定積分の基本演算練習

図形に囲まれた部分の面積を求めるだけでなく、大学で学ぶ近似法やフーリエ級数などにも積分は必須事項である。積分の方法はいろいろある。どの方法が適するのか、パズル感覚で解いていこう。

1

次のことを示せ。

(1)　奇関数と偶関数の積は、奇関数になる。

(2)　奇関数と奇関数の積は、偶関数になる。

(3)　偶関数と偶関数の積は、偶関数になる。

2

次の定積分を求めよ。

$$(1)\int_0^{\pi/2}(x+\sin x)dx$$

$$(2)\int_0^{\pi/6}\tan 2x dx$$

$$(3)\int_0^{\pi/4}\frac{\sin 2x}{1+\sin x}dx$$

$$(4)\int_0^{\pi/2}\cos^3 x dx$$

$$(5)\int_0^1\frac{3x^2+x+2}{2x^3+x^2+4x+1}dx$$

$$(6)\int_1^e(\log x)^2dx$$

$$(7)\int_0^{\pi/2}\frac{\cos 2\theta}{\sin\theta+\cos\theta}d\theta$$

$$(8)\int_e^{e^4}\frac{dx}{x\log x}$$

$$(9)\int_2^3\frac{dx}{(x+2)^2-5(x+2)+6}$$

$$(10)\ \int_{\pi/6}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^3 x} dx$$

$$(11)\ \int_0^1 \frac{dx}{1+x^2}$$

$$(12)\ \int_{-\pi}^{\pi} e^{nx} \sin nx dx \qquad (n : \text{任意の整数})$$

$$(13)\ \int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{dx}{\sin x}$$

$$(14)\ \int_{-5}^{5} x^{2017} \cos^{2017} x dx$$

$$(15)\ \int_0^{\pi/2} x(1-x) dx$$

$$(16)\ \int_1^e \frac{(\log t)^{39}}{t} dt$$

$$(17)\ \int_0^{\pi/22} (\sin 3x \cos 8x) dx + \int_0^{\pi/22} (\cos 3x \sin 8x) dx$$

$$(18)\ \int_{-\pi}^{\pi} (\sin mx \cos nx) dx \qquad (m, n : \text{任意の整数})$$

Hint

最初の 3 問…前者の関数を $f(x)$, 後者の関数を $g(x), h(x) = f(x)g(x)$ とする。さて、奇関数、偶関数の定義は？

(1)$\int_A^B f(x)dx + \int_A^B g(x)dx = \int_A^B [f(x) + g(x)]dx$

(2)$2x = \theta, \tan\theta = \sin\theta / \cos\theta$

(3)$\sin 2x = 2\sin x\cos x$。$\sin$ の式に $\cos$ が掛けられている。

(4)これも、$\sin$ の式に $\cos$ が掛けられているように変形。

(5) 一見難しいが、分母を微分して 2 で割ると？

(6)$\log x = t$.　微分演算子 dx も直すのを忘れずに。

(7)$\cos 2\theta$ をうまく変形すると、分数にならずに簡単になります。

(8)$\frac{1}{x\log x} = \frac{1}{\log x} \cdot \frac{1}{x}$

(9) まず因数分解をしてみると、置換積分をせずに済みます。

(10)$\sin$ の式に $\cos$ が掛けられている。

(11)$x = \tan\theta$

(12) 同形出現の積分。準備として、与式を I とし、2 回部分積分をすると I が出現する。ちなみに、$\cos n\pi = (-1)^n$ となる。

(13) 分母分子に $\sin x$ を乗ずる。$\cos x = \theta$

(14) 最初の証明問題を参考にしてくれ。答えは 0.

(15)$1 - t = x$.

(16) 指数のついたものは、その内部、つまり $\log t$ を x に置換する。

(17)$\sin\pi/22$ などを計算させようとは少しも思っていない。(1) と逆方向に変形する。つまり、多項式を積分する形にする。さてその式、どこかで見覚えがないか。

(18)$m = n$ と $m \neq n$ の場合分け。$m \neq n$ のときは、三角関数の和積公式を使う。この計算は大学で学ぶ「フーリエ級数」や「直交系関数」を求めるときに頻繁に使うだろう。

Answers

(1) $\frac{\pi^2}{8}+1$

(2) $2\log 2$

(3) $\sqrt{2}-\log\left(\frac{3}{2}+\sqrt{2}\right)$

(4) $\frac{2}{3}$

(5) $\log 2$

(6) $-3e-2$

(7) 0

(8) $2\log 2$

(9) $2\log 2-\log 3$

(10) $\frac{3}{2}$

(11) 以降は省略